

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluție

1. a) Se arată că $\text{rang}(A) = 3$.

b) Se arată ușor că mulțimea soluțiilor este $S = \{(0, \alpha, 1 - 2\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{C}\}$.

c) Presupunem că sistemul are soluția $X = (x \ y \ z) \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{C})$. Se obține sistemul
$$\begin{cases} x = 0 \\ 2x + y = 0 \\ 3x + 2y + z = 0 \\ 4x + 3y + 2z = 1 \end{cases}.$$

Sistemul omogen format din primele trei ecuații are doar soluția $x = y = z = 0$, care nu verifică a patra ecuație a sistemului, contradicție.

2. a) Se verifică prin calcul.

b) Din a) rezultă că „ \cdot ” este lege de compoziție pe H_t .

Deoarece pentru $t \in \mathbb{Z}$, simetrica din grupul (G, \cdot) a matricei $A(k \cdot t - 1)$ este matricea $A(-k \cdot t - 1)$, rezultă că $A(h \cdot t - 1) \cdot A(-k \cdot t - 1) = A((h - k)t - 1) \in H_t$, $\forall h, k \in \mathbb{Z}$.

c) Fie funcția $f: G \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(A(k)) = k + 1$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.

Se demonstrează că f este bijectivă și că este un morfism de grupuri.